Mètodes d'elecció no manipulables: una realitat o una ficció?

18a Trobada Matemàtica: Sistemes de votació i processos electorals

Dolors Berga
Departament d'Economia, Universitat de Girona

25 de juny 2015

Motivació

- Tenim incentius a votar sempre de manera sincera?

- La necesitat de prendre decisions és quelcom que es planteja habitualment. Quan aquestes decisions s'han de prendre col.lectivament és habitual usar algun sistema de votació, algun mètodes de decisió. De fet, els sistemes de votació s'usen des de temps remots, tot i que tant els que dissenyen aquests sistemes de votació com els que en fan ús són conscients de que sempre existeix la possibilitat d'afectar el resultat mitjançant el comportament estratègic

- En aquesta presentació explicarem sota quines circumstàncies els sistemes de votació no són manipulables en benefici propi (strategy-proofness) (tot i que existeix també la possibilitat de manipular per afectar al benestar dels altres sense alterar el propi -bossyness-)

Índex presentació

• Teoria de l'elecció social

1. Què és?; 2. Problemes que estudia; 3. Propietats importants; 4. Història

• Context d'Arrow

1. Elecció d'un ordre social: Exemples; 2. Teorema d'impossibilitat d'Arrow; 3. Ni Majoria ni Borda funcionen!; 4. Cas de dues alternatives

• Context de funcions d'elecció social

1. Escollir única alternativa social: Impossibilitat de Gibbard-Satterthwaite;
2. Mètodes de votació en aquest context: manipulables!
2. Restricció de preferències en funció del problema: votant medià i approval

• Sistemes de votació complint altres propietats: avaluació per punts o ranquejats, per aprovació,...

Teoria de l'elecció social

- *Què és?*

- És una disciplina que **estudia problemes de decisió col.lectiva**. Problemes en els quals s'ha de prendre una decisió que afecta a un conjunt d'agents (societat) i, per tant, s'hauria de tenir en compte, directament o indirecta, l'opinió d'aquests. L'objectiu principal és l'agregació de preferències o opinions individuals per prendre una decisió col.lectiva

- Definir **quines eleccions col.lectives responen millor als valors dels agents** és un problema central en economia, política i ètica

- No obstant, les **preferències dels agents són informació privada** i aconseguir que **revelin les verdaderes preferències** és molt complicat. Definir mètodes de decisió que redueixin (a zero si és possible) els guanys via el comportament estratègic és l'objectiu de propietats com la "**no manipulabilitat**"

Teoria de l'elecció social

• *Problemes que estudia i permet analitzar?*

· Decidir la posició dels diferents participants en una lliga o competició esportiva, a Eurovisió, ranquejar universitats, departaments, etc. (Borda o "scoring rule")

· Ordre d'assignació d'unes tasques entre membres d'un departament

· Elecció d'un cadidat a... (problemes de votació)

· L'assignació dels nens de P3 a escoles públiques o concertades (assignació de béns indivisibles)

· El repartiment de costos d'una actuació, com enllumenat públic a un carrer

· El repartiment/l'assignació d'un bé divisible

· Finançament i tirar endavant un projecte públic

Teoria de l'elecció social

• *Propietats de les funcions d'elecció social:*

- Control dels incentius (ex: no manipulabilitat)
- Justícia (ex: tractament igual d'iguals, lliure d'enveja)
- Eficiència de Pareto

Propietats en mètodes de votació: criteri de la majoria, criteri de monotonicitat, criteri de Condorcet, independència de les alternatives irrellevants, criteri de consistència, criteri de participació, independència de clons, simetria inversa

• *Història:*

- Teoria del benestar personal (Bentham i Mill)
- Teoria de les votacions (Condorcet, Borda,...)
- Bergson (1938): inicis de la formulació moderna en termes de funció de benestar social
- Arrow (1951, 1963): marca l'evolució en el tema

El context d'Arrow: Què estudia?

• A conjunt (finit) d'alternatives, $N = \{1, 2, .., n\}$ conjunt finit d'agents $(n > 2)$

• Preferències sobre A: relacions binàries completes, reflexives i transitives denifides sobre A

• $\mathcal{R}$ denota el conjunt de totes les possibles preferències, completes i transitives

• $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}$ conjunt de preferències admissibles per cada agent $i \in N$

• Una preferència de i es denota per $R_i \in \mathcal{R}_i$; Un perfil de preferències és $R = (R_1, ..., R_n)$

• Una **funció de benestar social (SWF)** sobre el domini $\times_{i \in N} \mathcal{R}_i$ és una funció $f : \times_{i \in N} \mathcal{R}_i \to \mathcal{R}$

El context d'Arrow: Mètodes de votació preferencials

Tenen en compte les preferències dels agents per decidir

Example

$A = \{x, y, z\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $\forall i \in N$, $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}$. Sigui el perfil $R = (R_1, R_2, R_3)$:

R_1	R_2	R_3
x	y	x
y	z	z
z	x	y

;

$f(R)$ **MAJORIA**	comparacions dos a dos
x	xPy (2 agents prefereixen x a y)
y	yPz (2 agents prefereixen y a z)
z	xPz (2 agents prefereixen z a x)

BORDA : S'assigna un punt a la 1^a opció, 2 a la 2^a i així successivament. Es calculen els punts totals que té cada alternativa i s'ordenen de la que té menys a més punts

$f(R)$ Borda
x
y
z

; $B_R(x) = 5$, $B_R(y) = 6$, $B_R(z) = 7$

El context d'Arrow: Teorema d'impossibilitat

Condicions addicionals de les SWF d'Arrow:

- UD- **Domini de preferències no restringit**
- PE- **Pareto eficiència** (unanimitat en la preferència estricta)
- IAI- **Independència de les alternatives irrellevants**

Definition

Una SWF és dictatorial si existeix un agent $d \in N$ que és sempre decisiu (és a dir: $\forall x, y \in A$ i $\forall R \in \times_{i \in N} \mathcal{R}_i$, $[xf(R)y \Leftrightarrow xR_d y]$)

Theorem (*d'impossibilitat d'Arrow, 1951, 1963*)

Les úniques funcions de benestar social amb mínim tres alternatives a escollir i complint UD, PE i IAI són dictatorials

- La regla de la majoria genera no transitivitats: **Paradoxa de votació**

Example

$A = \{x, y, z\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $\forall i \in N$, $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}$. La regla de la majoria aplicada al perfil $R = (R_1, R_2, R_3)$ dóna un ordre social $f(R)$ no transitiu:

R_1	R_2	R_3
x	y	z
y	z	x
z	x	y

;

$f(R)$
xPy (2 agents prefereixen x a y)
yPz (2 agents prefereixen y a z)
zPx (2 agents prefereixen z a x)

- La compta de **Borda incompleix IAI**

Example

$A = \{x, y, z, t\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $\forall i \in N$, $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}$. Sigui $R = (R_1, R_2, R_3)$, $R' = (R'_1, R'_2, R'_3)$, compareu ordre (x, y) a $f(R)$ i $f(R')$:

R_1	R_2	R_3		$f(R)$
z	z	y		z
x	x	z	;	**y**
y	y	t		**x**
t	t	x		t

; $B_R(x) = 8, B_R(y) = 7, B_R(z) = 4, B_R(t) = 11$

R'_1	R'_2	R'_3		$f(R')$
x	x	y		**x**
z	y	x	;	**y**
y	z	z		z
t	t	t		t

; $B_{R'}(x) = 4, B_{R'}(y) = 6, B_{R'}(z) = 8, B_{R'}(t) = 12$

La no manipulabilitat en el context d'Arrow: 2 alternatives

Status quo versus opció alternativa, dos candidats a optar a una plaça, etc

Altres propietats de les SWF:

• A- **Anonimitat**: el nom dels agents no importa
(és a dir, cap agent té un tracte especial, el vot de cadascun val exactament el mateix)

• N- **Neutralitat**: el nom de les alternatives no importa
(és a dir, no hi ha cap alternativa que tingui més suport inicial que l'altra o que sigui de més fàcil elecció)

• SP- **Sensibilitat positiva (no manipulabilitat)**: si una alternativa x és escollida i algun individu canvia les seves preferències augmentant el seu suport per a x, aleshores la mateixa alternativa x haurà de continuar essent escollida

Theorem (*Teorema de May, 1952*)

Quasevol funció de benestar social amb dues alternatives a escollir i complint A, N i SP és la regla de la majoria

Funcions d'elecció social

• A conjunt (finit) d'alternatives ($\#A \geq 2$), $N = \{1, 2, .., n\}$ conjunt finit d'agents ($n > 2$)

• Preferències sobre A: relacions binàries completes, reflexives i transitives denifides sobre A

• $\mathcal{R}$ denota el conjunt de totes les possibles preferències (domini universal/no restringit)

• $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}$ conjunt de preferències admissibles per cada agent $i \in N$

• $R_i \in \mathcal{R}_i$ denota una preferència de i, P_i la preferència estricta; $R = (R_1, ..., R_n)$ denota un perfil de preferències

• Una **funció d'elecció social (SCF)** sobre el domini $\times_{i\in N}\mathcal{R}_i$ és una funció $f : \times_{i\in N}\mathcal{R}_i \rightarrow A$

Exemples de mètodes de votació

• **Plurality**: Es vota per un candidat, i guanya aquell que té més vots (NOTA: només la primera opció de l'ordre de preferència val!)
T escollit donat el perfil de preferències

• **Plurality amb eliminació (Regla de Hare)**: Definit en vàries rondes. En cada ronda s'elimina el candidat amb menys vots en primera opció i es fa una nova ronda de votació amb la resta de candidats i ajustant l'ordre
S escollit: R eliminat a la 1^a ronda, P eliminat a 2^a ronda;

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	R	R	R	R
3r	S	S	P	P
4t	T	P	S	T

;

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	S	S	P	P
3r	T	P	S	T

Exemples de mètodes de votació

T eliminat en 3^a ronda

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	S	S	P	P
3r	T	P	S	T

;

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	S	T	T	S
2n	T	S	S	T

• **Borda**: S'assigna un punt a la 1^a opció, 2 a la 2^a i així successivament. Es calculen els punts totals que té cada alternativa i s'ordenen de la que té menys a més punts

R escollit: $B_R(R) = 1000,\ B_R(S) = 1300,\ B_R(T) = 1340,\ B_R(P) = 1610$

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	R	R	R	R
3r	S	S	P	P
4t	T	P	S	T

• **Plurality amb "runoff" (segona volta)**: Definit en dues rondes. S'escull el candidat amb majoria absoluta de primeres opcions. Si no n'hi ha passen a una segona volta els dos candidats amb més vots en primera opció. Guanya el que tingui més vots, bé en primera opció ajustant l'ordre de preferències, o tornant a votar

S escollit: T i S passen a 2^a volta; S guanya T amb 280 versus 220 vots

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	R	R	R	R
3r	S	S	P	P
4t	T	P	S	T

;

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	S	T	T	S
2n	T	S	S	T

• **Comparacions dos a dos:** Cada candidat s'aparella cara a cara a tots els altres. Un candidat obté un punt cada vegada que guanya i 1/2 si empaten. S'escull el candidat amb més punts

R escollit: P comparat amb [R, S i T]: P guanya a T però perd amb R i amb S;
R amb [S i T]: R guanya a S i a T;
S i T: S guanya a T;
Punts (P)=1; Punts (R)=3; Punts (S)=2; Punts (T)=0. L'ordre és R,S, P, T

• **Regla de Coombs**: S'eliminen els candidats amb més vots en última opció. Guanya l'últim(s) en eliminar-se

R escollit: T eliminat en 1a ronda; P en 2a; S eliminat en 3a ronda

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	T	T	S
2n	R	R	R	R
3r	S	S	P	P
4t	T	P	S	T

;

R	#vots:			
	130	120	100	150
1r	P	R	R	S
2n	R	S	P	R
3r	S	P	S	P

Definició de no manipulabilitat: "Strategy-proofness"

Definition

Una agent i manipula f si existeix R_N i R'_i tal que $f(R'_i, R_{N\setminus\{i\}})P_i f(R_N)$

Definition

Una SCF f és no manipulable (o *strategy-proof*) si cap agent pot manipular f

Exemples anteriors: Manipulables!

• **Plurality amb "runoff" (segona volta) és MANIPULABLE** !

A escollit a R i D escollit a R': un agent tipus 2 dirà que és tipus 3 i aconseguirà D que és millor que A !

Noteu que amb R A i B passen a la 2^a ronda; amb R' passen A i D

Sota R, A guanya: 10 - 9; Sota R', D guanya 12 - 7

R	#vots:			
	7	**5**	**4**	3
1r	A	B	D	C
2n	B	C	B	D
3r	C	D	C	A
4t	D	A	A	B

;

R'	#vots:			
	7	**4**	**5**	3
1r	A	B	D	C
2n	B	C	B	D
3r	C	D	C	A
4t	D	A	A	B

Dictadors i Impossibilitat de Gibbard-Satterthwaite

Definition

Una SCF és dictatorial si existeix un agent $d \in N$ tal que per qualsevol perfil de preferències $R \in \times_{i \in N} \mathcal{R}_i$, l'alternativa escollida $f(R)$ és una de les seves millors (és a dir, $f(R) R_d x$, $\forall x \in A$)

Theorem (*d'impossibilitat de Gibbard 1973-Satterthwaite 1975*)

Les úniques funcions d'elecció social amb mínim tres alternatives al rang o bé són manipulables o bé dictatorials

Per què s'usen els mètodes de ranqueig ("scoring rules")?

Cada funció d'elecció social que pertany a la classe dels **mètodes de ranqueig** pot ser representat per un vector $s = (s_0, s_1, ..., s_{k-1}) \in \mathbb{R}_k$ complint les condicions que $s_{j-1} \leq s_j$ per tot $j = 1, ..., k-1$ i $s_0 < s_{k-1}$. El rang de s és normalitzat suposant que $s_0 = 0$ i $s_{k-1} = k-1$. Els mètodes de ranqueig s'apliquen normalment al domini de les preferències estrictes. En aquest cas, els punts s'assignen a cada alternativa de manera que si l'alternativa x està en la posició j d'acord amb P_i, aleshores x rep $p_s^x(P_i) = s_{k-j}$ punts de l'agent i. Donat un perfil $P \in \mathcal{P}^N$ i una alternativa $x \in A$, sigui $p_s^x(P) = \sum_{i=1}^{n} p_s^x(P_i)$ és la puntuació de x a P quan s'aplica el mètode de ranqueig s. Aleshores, la societat escull per cada perfil de preferències el conjunt d'alternatives amb major puntuació

Definition

La funció d'elecció social $f_s : \mathcal{P}^N \to 2^A \setminus \{\emptyset\}$ associada amb el mètode de ranqueig s és tal que per tot $R \in \mathcal{R}^N$, $x \in f(R)$ si i només si $p_s^x(P) \geq p_s^y(P)$ for all $y \in A$

Per què s'usen els mètodes de ranqueig ("scoring rules")?

Definition (Reforçament)

Siguin N_1 i N_2 dos conjunts disjunts de votants. Suposem que W_1 és el conjunt de guanyadors per la població N_1, i W_2 és el conjunt de guanyadors per la població N_2. Si com a mínim un candidat guanya a les dues eleccions, aleshores el(s) guanyador(s) per la població sencera $(N_1 \cup N_2)$ són $W_1 \cap W_2$

Theorem (Young, 1975)

Una funció d'elecció social compleix anonimitat, neutralitat, reforçament i continuïtat si i només si és un mètode de ranqueig

Nota: (i) Són manipulables
(ii) La compta de Borda és un cas particular, la "menys susceptible" a manipulacions

Per què s'usa el mètode per aprovació ("approval")?

El **mètode per aprovació** dóna als agents el dret a votar per tantes alternatives com desitgi, i donats els vots de tots els agents s'escull l'alternativa(es) amb el número més gran de vots.

Sigui $M_i : \mathcal{R} \to 2^A$ defineix per cada preferència R_i el conjunt d'alternatives $Mi(Ri)$ que i aprova. Una funció d'elecció social representa el mètode per aprovació $v : \left(2^A\right)^N \to 2^A \backslash \{\emptyset\}$ si agrega les decisions individuals per seleccionar les alternatives amb el número més gran de vots. Aleshores, per cada $(M_1(R_1), ..., M_n(R_n)) \in \left(2^A\right)^N$, $x \in v(M_1(R_1), ..., M_n(R_n))$ if and only if $N_x(R) = |\{i \in N : x \in M_i(R_i)\}| \geq |\{i \in N : y \in M_i(R_i)\}| = N_y(R)$ for all $y \in A$

Per què s'usa el mètode per aprovació ("approval")?

Sigui $\mathcal{R}$ el conjunt de preferències estrictes però incloent informació sobre el conjunt de candidats/alternatives aprovades per cada agent

Definition

La funció d'elecció social $f : \mathcal{R}^N \to 2^A \setminus \{\emptyset\}$ és el mètode per aprovació si per qualsevol $R \in \mathcal{R}^N$, $x \in f(R)$ si i només si $N_x(R) \geq N_y(R)$ per qualsevol $y \in A$

Theorem (Fishburn, 1978)

Una funció d'elecció social compleix anonimitat, neutralitat, reforçament i un condició tècnica si i només si és mètode per aprovació

Lemma (Propietats que compleix el mètode d'aprovació)

Criteri de monotonia, IAI, criteri de consistència, criteri de participació, independència de clons, simetria inversa

Mètodes de ranqueig i aprovació amb preferències dicotòmiques

Definition

Preferències dicotòmiques són aquelles que classifiquen les alternatives en dos conjunts disjunts: els bons i els dolents. $\mathcal{D}$ és el conjunt de totes aquestes preferències

Nota No són sempre realistes ja que encara que poguem considerar dos candidats com a bons moltes vegades preferim un a l'altre: les preferències dicotòmiques no tenen en compte aquesta distinció entre candidats del mateix conjunt!

Mètodes de ranqueig i aprovació amb preferències dicotòmiques

Theorem (Vorsatz, 2008)

Suposem que $n \geq 3$. La funció d'elecció social $f_s : \mathcal{D}^N \rightarrow 2^A \backslash \{\emptyset\}$ corresponent a la regla de ranqueig s és no manipulable si i només si és la compta de Borda (que en aquest cas coincideix amb el mètode per aprovació)

Lemma (Propietats que compleix el mètode d'aprovació amb preferències dicotòmiques)

Criteri de la majoria, criteri de monotonia, criteri de Condorcet, IAI, criteri de consistència, criteri de participació, independència de clons, simetria inversa

La no manipulabilitat: una realitat en restringir les preferències

DOMINIS COMUNS: Preferències single-peaked sobre conjunts d'alternatives ordenades linealment; Preferències single-peaked en més d'una dimensió
- Provisió del nivell d'un o varis béns públics
- Votacions i elecció d'un o més candidats

DOMINIS PERSONALIZATS:
- Two-sided matching problems (Roth and Sotomayor, 1990)

- School choice and house allocation problems (Shapley and Scarf, 1974, Hylland and Zeckhauser, 1977)

- House allocation with money (Miyagawa, 2001)

- Division problem with single-peaked preferences (Sprumont, 1991)

- Public good provision and cost sharing: Cost sharing (Moulin and Shenker, 2001, Mutwsuami, 2005)

Provisió d'un bé públic i preferències unimodals

Definition (Black, 1948a, 1948b)

Donat un ordre de les alternatives, diem que un perfil de preferències és "single-peaked" o **unimodals** respecte a aquest ordre d'alternatives si i només si (i) cada agent té una única alternativa preferida, $p(R_i)$, i (ii) si una alternativa $z \in [x, p(R_i)]$, aleshores zP_ix (en estar més a prop del punt ideal)

Definition (Regles de votant medià generalized)

Para cada coalició $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, fixem una alternativa $a_s \in A$. Definim una SCF f de manera que, per cada perfil de preferències $(R_1, .., R_n)$, $f(R_1, .., R_n) = inf_{S \in N}[sup_{i \in S}(a_S, p(R_i))]$

Provisió d'un bé públic i preferències unimodals

Theorem (Moulin, 1980)

Una SCF f definida sobre perfils de preferències single-peaked respecte a un conjunt totalment ordenat és no manipulable si i només si és una regla del votant medià generalitzat

Theorem (Moulin, 1980)

Una SCF f definida sobre perfils de preferències single-peaked respecte a un conjunt totalment ordenat és no manipulable i anònima si i només si existeixen $n+1$ punts $a_1, .., a_{n+1} \in A$ (votantes fantasmes), tal que, per a tots els perfils $(R_1, .., R_n)$,

$$f(R_1, .., R_n) = med(a_1, .., a_{n+1}; p(R_1), .., p(R_n))$$

Conjunt d'alternatives són els enters en un interval
$[a, b] = \{a, a+1, a+2, .., b\} = A$

Ejemplo 1 3 agents, cadascun d'ells votant por la seva alternativa preferida. Seleccionem l'alternativa mediana

Ejemplo 2 Para qualsevol número d'agents, cadascun d'ells votant per la seva alternativa preferida, seleccionem la menor d'elles (situem n-1 votants fantasmes a a i calculem la mediana)

Bibliografia

· Arrow, K. (1951): Social choice and individual values. Cowles Foundation Monographs, Yale University Press, 2nd edition, New York: Wiley, 1963

· Barberà, S. (2011): Strategy-proofness: A Survey. in K. Arrow, A. Sen and K. Suzumura (Eds.) North Holland, Handbook of Social Choice II

· Black, D. (1948a): "On the Rationale of Group Decision Making," Journal of Political Economy 56, 23-34. Black, D. (1948b): The Decisions of a Commitee Using a Special Majority,Econometrica 16, 245-261

· Black, D. (1948b): "The Decisions of a Commitee Using a Special Majority," Econometrica 16, 245-261

· Borda, J-C. de (1897): "Memoire sur les Elections au Scrutin", Memoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris:657-665 (English translation at Isis 44, 42-51 ,1953)

Bibliografia

· Condorcet, Marquis de (1785): Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, Paris (Essay on the Application of Analysis to the Probability of Majority Decisions)· Gibbard,

A. (1973): "Manipulation of Voting Schemes: A General Result," Econometrica 41, 587-601

· May, K. O. (1952): "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision," Econometrica 20, 680-684

· Moulin, H. (1980): "On Strategyproofness and Single-peakedness," Public Choice 35(4), 437-455

· Pattanaik, P. K. (1973): "On the Stability of Sincere Voting Situations," Journal of Economic Theory 6, 558-574

Bibliografia

· Satterthwaite, M. A. (1975): "Strategy-Proofness and Arrows Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions," Journal of Economic Theory 10, 187-217

· Vorsatz, M. (2008): "Scoring rules on dichotomous preferences," Social Choice and Welfare 31,151–162

· Xu, Y. (2010): Axiomatizations of Approval Voting, in Handbook on Approval Voting, edited by Jean-Francois Laslier and M. Remzi Sanver, Springer, New York, 2010

· Young, P. (1975): "Social Choice Scoring Functions," SIAM Journal on Applied Mathematics, 28, 824-838

· Zeckhauser, R. (1973): "Voting Systems, Honest Preferences and Pareto Optimality," The American Political Science Review 67, 934-46